

Brèves communications - Kurze Mitteilungen

Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. — Für die kurzen Mitteilungen ist ausschliesslich der Autor verantwortlich. — Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. — The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

Ein (M, F) -Problem mit Nebenbedingung

In dieser Zeitschrift¹ wurden schon diejenigen konvexen Rotationskörper von der festen Länge l ermittelt, welche bei vorgegebenem Volumen V entweder die grösste Oberfläche F oder das grösste Integral der mittleren Krümmung M besitzen. Im Hinblick auf eine Fundamentalaufgabe der Theorie der konvexen Rotationskörper stelle ich jetzt noch ein weiteres Problem:

«Gesucht sind die konvexen Rotationskörper von der festen Länge l , welche bei vorgegebenem Integral der mittleren Krümmung M die kleinste Oberfläche F aufweisen.»

Es hat sich gezeigt, dass dieses Problem schwierig ist, indem die Gestalt des Körpers entscheidenden Einfluss hat. Mit den einfachen Hilfsmitteln, welche zur Bewältigung der obgenannten zwei Probleme ausreichten, lässt sich die volle Lösung nicht erzwingen, so dass ich mich vorderhand mit einer Teillösung begnügen muss.

Bekanntlich bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man die volle Klasse der konvexen Rotationskörper ersetzt durch die Teilklassen der *konvexen Kegelstümpfkörper*. Dabei dürfen höchstens zwei Kegelstümpfe Kegel sein, und es kann höchstens ein Zylinder auftreten.

In die Teilklassen \mathfrak{K}_i^* werfen wir alle konvexen Rotationskörper, die der Bedingung $\beta_i \geq \beta_o$, $i = 1, 2, \dots, n$ Genüge leisten. Das Gleichheitszeichen kann wegen der Konvexitätsforderung nur für $i = n$ in Frage kommen (Abb. 1).

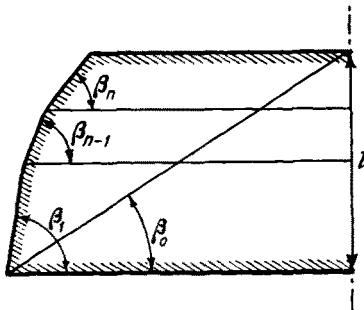


Abb. 1.

Die Teilklassen \mathfrak{K}_i^{**} aber enthalte alle konvexen Rotationskörper, die der Bedingung

$$\cos \alpha \geq \frac{\cos \beta_i (5 \cos \beta_i - 3)}{1 - 3 \cos \beta_i + 4 \cos^2 \beta_i} \quad (\text{Abb. 2})$$

mit $\beta_i < \beta_o$ genügen. Wir behaupten nun, dass bei Beschränkung auf die Teilklassen \mathfrak{K}_i^* und \mathfrak{K}_i^{**} im vollen

Intervall $\pi l < \leq M \infty$ Kegel und nur diese Körper die verlangte Eigenschaft besitzen.

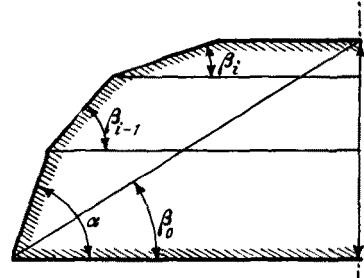


Abb. 2.

Beweis. Für Kegelstümpfe gilt (Abb. 3):

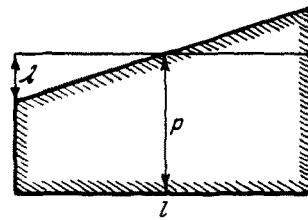


Abb. 3.

$$M = \pi \left[l + \pi (p + \lambda) - 2 \lambda \operatorname{arctg} \left(\frac{l}{2\lambda} \right) \right],$$

$$F = 2 \pi \left[p^2 + \lambda^2 + p \sqrt{l^2 + 4\lambda^2} \right], \quad (1)$$

$$0 \leq |\lambda| \leq p.$$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir die *Zylinderkurve*

$$M = \pi [l + \pi p], \quad F = 2 \pi [p^2 + pl], \quad (1a)$$

eine Parabel, für $\lambda = p$ die *Kegelkurve*

$$M = \pi \left[l + 2\pi p - 2p \operatorname{arctg} \left(\frac{l}{2p} \right) \right], \quad (1b)$$

$$F = 2\pi \left[2p^2 + p \sqrt{l^2 + 4p^2} \right].$$

Beide Kurven sind von unten konvex und besitzen die Anfangssteigung $2l/\pi$. Die Enveloppenbedingung

$$\frac{\partial(M, F)}{\partial(p, \lambda)} = 0$$

ist nur gerade für $\lambda = 0$, also für Zylinder, erfüllt. Außerdem besitzt F bei festem M für $\lambda = 0$ ein Maximum, so dass die Zylinderkurve ganz nicht unterhalb der Kegelkurve liegt und wir infolgedessen behaupten dürfen, dass in der Klasse der Kegelstümpfe die Kegel und nur diese Körper bei festem M kleinstes F besitzen.

Nun wenden wir uns mehrgliedrigen Körpern zu, wobei wir von der zulässigen Vereinfachung $l = 1$ Gebrauch

¹ H. BIERI, Exp. 6, H. 6, 222 (1950); 7, H. 10, 392 (1951). Man beachte insbesondere die Klasseneinteilung.

machen¹. Es ist leicht ersichtlich, dass für dieselben rein formal V eine kubische, F eine quadratische und M eine lineare Funktion der Radien oder Höhen ist. Variiert man einen derartigen Körper bei konstanten Winkeln so, dass sich ändernde Radien und Höhen linear von einer einzigen unabhängigen Variablen, etwa einer Höhe, abhängen, so entspricht dieser Deformation in einer (M, F) -Ebene eine Parabel

$$M = dx + e; \quad F = ax^2 + 2bx + c.$$

Konkavität und Konvexität dieser Parabel hängen allein vom Vorzeichen des Koeffizienten a ab, indem die Kurve für $a < 0$ von unten konkav, für $a > 0$ von unten konvex ausfällt und für $a = 0$ in eine Gerade übergeht. In der Folge haben wir also nur auf das Vorzeichen von a zu achten.

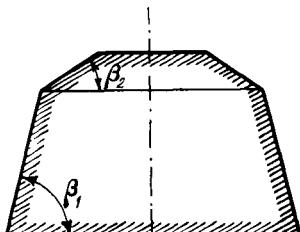


Abb. 4.

Beginnen wir mit dem *Doppelkegelstumpf* aus \mathfrak{K}_1^* (Abb. 4, 5).

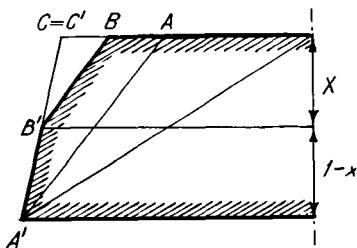


Abb. 5.

Die Stützebene durch AA' , die man sich senkrecht vorzustellen hat, wird parallel mit sich selbst von der Rotationsachse weg verschoben, bis sie durch C läuft. Wir erzeugen so eine einparametrische Schar von Doppelkegelstümpfen, wobei der Parameter x das Intervall $0 \leq x \leq 1$ durchläuft. Anfangs- wie Endkörper sind Kegelstümpfe. Man findet:

$$\begin{aligned} a &= -[\cot^2 \beta_1 (\sec \beta_1 - \sec \beta_2) + \\ &+ (\cot \beta_2 - \cot \beta_1)^2 (\sec \beta_2 - 1)] \leq 0. \quad (2) \end{aligned}$$

(Gleichheitszeichen nur für $\beta_1 = \beta_2$)

Nun ist ja die Kegelkurve von unten konvex, die Bildpunkte der beiden Kegelstümpfe liegen nicht unterhalb, und da die betrachtete Parabel wegen (2) von unten konkav ist, so kann kein Doppelkegelstumpf aus \mathfrak{K}_1^* extremal sein. Immer existiert ein Kegel, der bei gleichem M ein kleineres F aufweist.

In gleicher Weise wird ein zulässiger *Dreifachkegelstumpf* behandelt. Die zugehörige einparametrische Schar

von Dreifachkegelstümpfen besitzt als Anfangs- und Endkörper je einen Doppelkegelstumpf, welche eben als nicht extremal erkannt wurden. a besitzt den nämlichen Wert wie oben, deshalb ist die betreffende Parabel wieder von unten konkav, und die Dreifachkegelstümpfe können nicht extremal sein.

Das Verfahren lässt sich aber auf Kegelstumpfkörper von beliebig hoher Gliedzahl anwenden, so dass behauptet werden darf, dass in der Klasse \mathfrak{K}^* die *Kegel* und nur sie extremal sind.

Weiter betten wir einen beliebigen *Kegelstumpf-Kegel* in eine einparametrische Schar ebensolcher Körper mit x als Parameter ein (Abb. 6). Haben wir vorhin den Körper oben angeschliffen, so tun wir jetzt dasselbe am andern Ende.

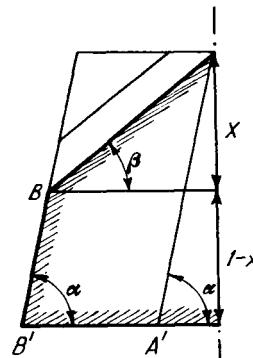


Abb. 6.

Indem wir die durch S laufende Stützebene parallel zu sich selbst nach aussen verschieben, durchläuft x das Intervall $0 < x < 1$. Man findet:

$$a = \frac{\cos \beta}{1 - \cos \beta} - 2 \cot \beta \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (3)$$

Im Gegensatz zu (2) ist hier a *indefinit*. Der ausschlaggebende Koeffizient besitzt die nichttriviale Nullstelle

$$\begin{aligned} \cos \alpha^* &= \frac{\cos \beta (5 \cos \beta - 3)}{1 - 3 \cos \beta + 4 \cos^2 \beta} \quad (4) \\ \text{bzw. } \cos \beta^* &= \frac{3(1 - \cos \alpha) + \sqrt{9 + 2 \cos \alpha - 7 \cos^2 \alpha}}{2(5 - 4 \cos \alpha)} \end{aligned}$$

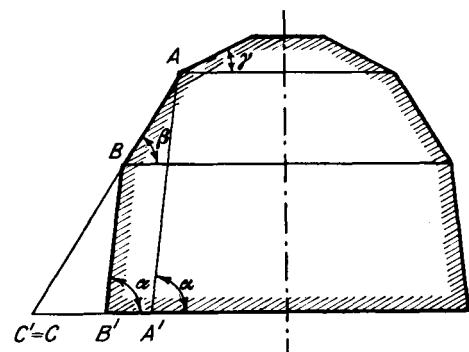


Abb. 7.

Im Intervall $\beta < \alpha < \alpha^*$ ist a negativ, und die zugehörige Parabel ist durchweg von unten konkav. Den Werten $x = 0$ sowie $x = 1$ entsprechen Kegel, und da die

¹ Man setzt $x = l\bar{x}$, $M = l\bar{M}$, $F = l^2\bar{F}$ und lässt nachher die Querstriche weg.

¹ Durchläuft β das Intervall $0 \geq \beta \geq \arccos(3/5)$, so durchläuft α^* monoton das Intervall $0 \geq \alpha^* \geq \pi/2$, und es ist mit Ausnahme von $\beta = 0$ immer $\alpha^* > \beta$.

Grenzfälle $\alpha = \beta$, $\alpha = \alpha^*$ sich in leicht durchschaubarer Art anschliessen, darf man behaupten, dass ein Kegelstumpf-Kegel, welcher der Bedingung $\beta < \alpha < \alpha^*$ genügt, nicht extremal sein kann¹.

Dasselbe gilt aber auch für irgendeinen zulässigen *Doppelkegelstumpf*, ist er doch Mitglied einer einparametrischen Körperschar mit den Randkörpern *Kegelstumpf/kegel* und *Kegelstumpf* [vgl. Abb. 6 sowie (2)].

Schliesslich deformieren wir in passender Weise einen *Dreifachkegelstumpf* (Abb. 7). Wieder berechnet man:

$$a = \frac{\cos \beta}{1 - \cos \beta} - 2 \cot \beta \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (3a)$$

Ist nun die Bedingung $\gamma < \beta < \alpha < \alpha^*$ erfüllt, wobei zur Berechnung von α^* in (4) β durch γ zu ersetzen ist, so ist nach früheren Ausführungen die ganze Körperschar nicht extremal.

Das Verfahren lässt sich sinngemäss auf Mehrfachkegelstümpfe mit beliebig vielen Gliedern anwenden, und man sieht, dass die ganze Klasse \mathfrak{K}_1^{**} nicht extremal sein kann. Damit ist der Beweis fertig.

Es besteht die Vermutung, dass die Kegel in der vollen Klasse der konvexen Rotationskörper von fester Länge l extremal sind, das heisst, dass sie bei vorgegebenem M kleinstes F aufweisen. Wäre diese Eigenschaft gesichert, so würde man im Hauptproblem der konvexen Rotationskörper einen gehörigen Schritt vorankommen. Der Beweis der genannten Eigenschaft dürfte aber sehr schwierig sein.

H. BIERI

Bern, den 6. Januar 1953.

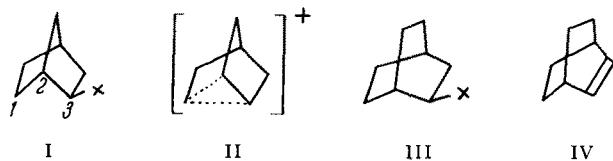
Summary

The problem is given to find those rotatory bodies of the fixed length l , which possess, for a given value of M , the least surface F . If we limit the admitted bodies to two well-defined subclasses \mathfrak{K}_1^* and \mathfrak{K}_1^{**} , the quality mentioned belongs to the cones only. It is supposed that the cones in the whole class of the convex rotatory bodies of the fixed length l are extremal.

¹ Die Bedingung besagt anschaulich, dass aufeinanderfolgende Kantenwinkel nicht zu stark differieren dürfen!

The Driving Force for Formation of Non-Classical Ions

The elegant work of WINSTEIN and TRIFAN¹, and of ROBERTS and coworkers² on the solvolysis of norbornyl derivatives ($X = \text{Br}$, Cl , $\text{OSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{Br-p}$) has demonstrated the existence of the nonclassical ion (II).

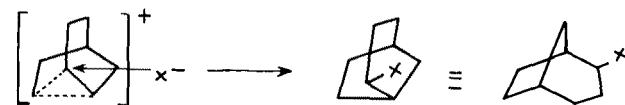


This work prompted the investigation of the analogous bicyclo[2.2.2]octane derivatives (III). This system

¹ S. WINSTEIN and D. TRIFAN, J. Amer. Chem. Soc. 74, 1147 (1952).

² J. D. ROBERTS *et al.*, J. Amer. Chem. Soc. 72, 3116, 3329 (1950); 73, 5009 (1951).

was chosen because the geometry of the three carbon system is essentially identical with that of the norbornyl system; the critical difference between the two systems being that (I) is a strained molecule and (III) is strainless. This can readily be demonstrated by attempting to make a model of (I). The bicyclooctane system has a further advantage in that if rearrangement via a non-classical ion occurs, a different bicyclic system will be formed: bicyclo[1.2.3]octane.



Attempts to demonstrate the existence or non-existence of the non-classical ion were undertaken in the following ways: by the addition of unsymmetrical reagents (HX , $X = \text{Br}$, Cl , acetoxy, and thioacetoxy) to bicyclo[2.2.2]octane-2 (IV), and by the solvolysis of (III) ($X = \text{Br}$, Cl , and $\text{OSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{Br-p}$).

In all cases of addition, no rearrangement of the carbon skeleton was observed. The addition of hydrogen bromide in the presence of benzoylperoxyde gave the corresponding 2-bromobicyclo[2.2.2]octane¹, the addition of gaseous hydrogen chloride yielded 2-chlorobicyclo[2.2.2]octane, m.p. 110–112°.

Analysis: Calculated for $C_8\text{H}_{13}\text{Cl}$: C, 66.43; H, 9.05; Cl, 24.52. Found: C, 66.47; H, 9.04; Cl, 24.47.

Reduction of the chloride with sodium and alcohol produced bicyclo[2.2.2]octane, m.p. 166–168° identical with a sample obtained by hydrogenation of (IV). Thioacetic acid² gave the thioacetate, b.p. 101–102° at 2 mm, n_{D}^{24} 1.5209.

Analysis: Calculated for $C_{10}\text{H}_{16}\text{OS}$: C, 65.2; H, 8.8. Found: C, 64.8; H, 8.4.

Desulfurization of the thioacetate with Raney-nickel gave saturated (IV), m.p. 168–171°. The addition of acetic acid in the presence of p-toluenesulfonic acid yielded the corresponding acetoxy compound, which was reduced with lithium aluminum hydride to the known alcohol³, m.p. 212–214°, phenylurethane, m.p. 135–137°, p-nitrobenzoate, m.p. 97–98°.

Analysis: Calculated for $C_{18}\text{H}_{17}\text{O}_4\text{N}$: C, 65.43; H, 6.22; N, 5.08. Found: C, 65.47; H, 6.24; N, 5.11.

p-Bromobenzenesulphonate, m.p. 80–82°.

Analysis: Calculated for $C_{14}\text{H}_{17}\text{O}_3\text{SBr}$: C, 48.66; H, 4.96; S, 9.28. Found: C, 48.50; H, 4.96; S, 9.28.

The p-bromobenzenesulphonate ester was reduced with lithium aluminum hydride to yield bicyclo[2.2.2]octane, m.p. 160–162°.

It has, therefore, been demonstrated that whether the addition goes by way of a free radical mechanism (HBr and thioacetic acid) or by an ionic mechanism (HCl and acetic acid) the reactions proceed without rearrangement of the carbon skeleton.

When III ($X = \text{Cl}$, Br , and $\text{OSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{Br-p}$) was subjected to solvolysis by treatment with aqueous lithium carbonate, the product isolated was bicyclo[2.2.2]octane-2-ol, m.p. 212–214°. DOERING⁵ has shown

¹ W. VON DOERING and M. FARBER, J. Amer. Chem. Soc. 71, 1514 (1949).

² H. BADER, L. C. CROSS, I. HEILBRON, and E. R. H. JONES, J. Chem. Soc. 1949, 621.

³ G. KOMMPA, Ber. dtsch. chem. Ges. 68, 1267 (1935).

⁴ The low m.p. is probably due to a slight impurity, since these substances have large cryoscopic constants. See: M. S. NEWMAN and Y. T. YU, J. Amer. Chem. Soc. 74, 507 (1952).

⁵ Private communication from Prof. W. VON DOERING.